## § 2. ТЕОРЕМЫ ОБ ИЗМЕНЕНИИ КОЛИЧЕСТВА ДВИЖЕНИЯ И О ДВИЖЕНИИ ЦЕНТРА МАСС ДЛЯ УДАРА. ТЕОРЕМА КЕЛЬВИНА

Пусть до удара точка $M$ массой $m$ двигалась по участку траектории $AM$, имея непосредственно перед ударом скорость $\bar{v}$ (рис. 152). Под действием ударной силы $\bar{F}$ и неударной $\bar{F}^*$ точка изменила скорость, которая сразу после удара стала $\bar{u}$. После удара точка продолжает двигаться по участку траектории $MB$. Удар точки $M$ характеризуется почти мгновенным изменением ее скорости от $\bar{v}$ до $\bar{u}$ по модулю и направлению и, следовательно, в общем случае резким изломом ее траектории в момент удара. По теореме об изменении количества движения для точки в интегральной форме имеем

$$m\bar{u}-m\bar{v}=\int_0^\tau \bar{F}\,dt+\int_0^\tau \bar{F}^*\,dt,$$

где $\tau$ — время удара. Обозначая импульс ударной силы $\bar{S}$ и пренебрегая импульсом неударной силы за время удара по сравнению с ударным импульсом, получаем следующую **теорему об изменении количества движения точки при ударе**:

$$m\bar{u}-m\bar{v}=\bar{S}, \tag{3}$$

т. е. *изменение количества движения точки за время удара равно ударному импульсу, приложенному к точке.* В проекциях на оси координат имеем:

$$mu_x-mv_x=S_x;\quad mu_y-mv_y=S_y;\quad mu_z-mv_z=S_z. \tag{3'}$$

Изменение скорости точки при ударе $\bar{u}-\bar{v}=\bar{S}/m$, т. е. оно параллельно ударному импульсу

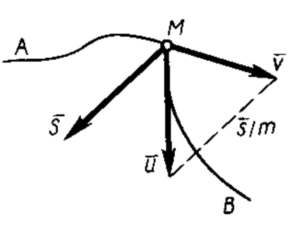


Рис. 152

Для любой механической системы, состоящей из $N$ точек, разделим ударные силы на внешние и внутренние. Применяя теорему об изменении количества движения для удара к каждой точке системы, получаем



$$m_k\bar{u}_k-m_k\bar{v}_k=\bar{S}_k^{(e)}+\bar{S}_k^{(i)},\quad i=1,\ 2,\ ...,\ N,$$

где $\bar{S}_k^{(e)}$ и $\bar{S}_k^{(i)}$ — ударные импульсы внешних и внутренних сил. Импульсами неударных сил за время удара пренебрегаем. Суммируя по всем точкам системы, имеем

$$\sum_k m_k\bar{u}_k-\sum_k m_k\bar{v}_k=\sum_k \bar{S}_k^{(e)}+\sum_k \bar{S}_k^{(i)}.$$

Обозначая количества движения системы после и до удара соответственно

$$\bar{Q}=\sum_k m_k\bar{u}_k;\quad \bar{Q}_0=\sum_k m_k\bar{v}_k$$

и учитывая, что по свойству внутренних сил, в том числе и ударных, $\sum_k \bar{S}_k^{(i)}=0$, имеем

$$\bar{Q}-\bar{Q}_0=\sum_k \bar{S}_k^{(e)}. \tag{4}$$

Соотношение (4) выражает **теорему об изменении количества движения системы при ударе**: *изменение количества движения системы за время удара равно векторной сумме внешних ударных импульсов, приложенных к точкам системы.* В проекциях на координатные оси получаем:

$$Q_x-Q_{0x}=\sum_k S_{kx}^{(e)};\quad Q_y-Q_{0y}=\sum_k S_{ky}^{(e)};\quad Q_z-Q_{0z}=\sum_k S_{kz}^{(e)}. \tag{4'}$$

Применяя формулу для вычисления количества движения системы через массу системы и скорость центра масс, имеем

$$\bar{Q}=M\bar{u}_C;\quad \bar{Q}_0=M\bar{v}_C,$$

где $M$ — масса системы; $\bar{v}_C$ и $\bar{u}_C$ — скорости центра масс до и после удара. С учетом этого из (4) получаем следующую **теорему о движении центра масс системы**:

$$M(\bar{u}_C-\bar{v}_C)=\sum_k \bar{S}_k^{(e)}. \tag{5}$$

В проекциях на координатные оси она примет форму

$$\left.\begin{aligned} M(u_{Cx}-v_{Cx})&=\sum_k S_{kx}^{(e)};\\ M(u_{Cy}-v_{Cy})&=\sum_k S_{ky}^{(e)};\\ M(u_{Cz}-v_{Cz})&=\sum_k S_{kz}^{(e)}.\end{aligned}\right\} \tag{5'}$$

**Частные случаи.** 1. Если $\sum_k \bar{S}_k^{(e)}=0$, то из (4) и (5) следует

$$\bar{Q}=\bar{Q}_0;\quad \bar{u}_C=\bar{v}_C, \tag{6}$$

т. е. *количество движения системы и скорость центра масс не изменяются, если векторная сумма внешних ударных импульсов, приложенных к точкам системы, равна нулю.* Это



законы сохранения количества движения и движения центра масс системы при ударе.

2. Если имеется координатная ось, например $Ox$, для которой $\sum_k S_{kx}^{(e)}=0$, то из (4′) и (5′) получаем следующие законы сохранения проекции количества движения и движения центра масс:

$$Q_x=Q_{0x};\quad u_{Cx}=v_{Cx}. \tag{6'}$$

Из (3) можно получить теорему Кельвина для работы ударной силы за время удара. Непосредственно вычислить работу ударной силы за время удара трудно, так как ударные силы очень большие, а перемещения точек системы за время удара малы и ими пренебрегают. Теорема Кельвина позволяет выразить работу силы через импульс силы и среднее значение скоростей точки, т. е. величины конечные при ударе. Умножив (3) последовательно на $\bar{u}$ и $\bar{v}$ скалярно, получим

$$mu^2-m\bar{u}\cdot\bar{v}=\bar{S}\cdot\bar{u};\quad m\bar{u}\cdot\bar{v}-mv^2=\bar{S}\cdot\bar{v}.$$

После сложения этих равенств и деления на 2 имеем

$$mu^2/2-mv^2/2=\frac{1}{2}\bar{S}\cdot(\bar{v}+\bar{u}).$$

По теореме об изменении кинетической энергии для точки левая часть этого равенства равна работе $A$, приложенной к точке силы $\bar{F}$. Поэтому

$$A=\frac{1}{2}\bar{S}\cdot(\bar{u}+\bar{v}). \tag{7}$$

Это и есть **теорема Кельвина**: *работа силы, приложенной к точке, за какой-либо промежуток времени равна скалярному произведению импульса силы за тот же промежуток времени на полусумму начальной и конечной скоростей точки.*

Теорема Кельвина применима ко всем случаям движения точки, в том числе и к явлению удара.

Для механической системы теорема Кельвина получается из (7) путем суммирования по всем точкам системы, т. е.

$$\sum_k A_k=\frac{1}{2}\sum_k \bar{S}_k\cdot(\bar{u}_k+\bar{v}_k), \tag{8}$$

где $\bar{S}_k=\bar{S}_k^{(e)}+\bar{S}_k^{(i)}$ — импульс внешней и внутренней сил, действующих на $k$-ю точку.